

TRANSFERT DE CHALEUR ET DE MASSE DANS UN ÉCOULEMENT RADIAL ENTRE DEUX DISQUES PARALLELES FIXES, OU TOURNANT A LA MEME VITESSE*

FRANK KREITH†

Laboratoire d'Aérodynamique du C.N.R.S., Meudon, France

(Reçu le 1 Septembre 1965)

Résumé—Les équations de Navier-Stokes pour un écoulement radial laminaire entre deux disques parallèles tournant à la même vitesse ont été résolues par un développement en série. Le terme dominant pour le profil de vitesse radiale a été employé alors pour résoudre l'équation de l'énergie et les nombres de Nusselt moyens ont été calculés numériquement en fonction des nombres de Reynolds, de Prandtl et de Taylor, pour plusieurs conditions aux limites. Pour une vitesse de rotation nulle, on a trouvé que les solutions analytiques étaient en bon accord avec les résultats expérimentaux dans le régime d'écoulement laminaire, mais on a observé un phénomène de transition inverse qui limite le régime laminaire sous certaines conditions. Dans la région d'écoulement turbulent, on a obtenu une équation empirique pour le nombre de Nusselt sans rotation à partir des données expérimentales et l'on a exposé une méthode pour évaluer le nombre de Nusselt moyen dans le régime d'écoulement mixte.

NOTATIONS

a , demi-distance entre les deux disques;
 \bar{c} , concentration;
 c_p , chaleur spécifique du fluide à pression constante;
 D , diamètre des disques;
 \mathcal{D}_v , coefficient de diffusion de la vapeur dans le cas du transfert de masse;
 \bar{h} , coefficient moyen de convection;
 \bar{h}_t , coefficient de convection en écoulement turbulent;
 \bar{h}_l , coefficient de convection en écoulement laminaire;
 k , conductivité thermique du fluide;
 \bar{k}_c , coefficient de transfert de masse moyen;
 m , débit massique de l'écoulement;
 q , flux de chaleur global;
 Q , débit volumique de l'écoulement;
 \bar{r} , distance radiale;
 \bar{r}_1, \bar{r}_2 , rayons d'entrée et de sortie;
 T , température;
 T_p , température du disque;
 T_o , température du fluide à l'entrée;

\bar{u} , composante radiale de la vitesse;
 \bar{v} , composante de la vitesse dans la direction ϕ ;
 \bar{w} , composante de la vitesse sur l'axe des z ;
 W , puissance totale dissipée dans l'appareil;
 x , coordonnée radiale sans dimensions;
 y , coordonnée axiale sans dimensions;
 Z , distance axiale du plan médian;
 μ , viscosité;
 ν , viscosité cinématique, $\nu = \mu/\rho$;
 ω , vitesse angulaire;
 ρ , densité.

Quantité sans dimensions

a^2 , nombre de Taylor, $a^2 = \omega a^2/\nu$
 \bar{Nu} , nombre de Nusselt moyen, $\bar{Nu} = 2\bar{h}a/k$;
 Pr , nombre de Prandtl, $Pr = \mu c_p/k$;
 Re , nombre de Reynolds, $Re = \rho Q/4\pi\mu a$;
 Sc , nombre de Schmidt, $Sc = \mu/\rho\mathcal{D}_v$;
 \bar{Sh} , nombre de Sherwood moyen,
 $\bar{Sh} = 2\bar{k}_c a/\mathcal{D}_v$;
 Pe , nombre de Péclet, $Pe = Re.Pr$.

1. INTRODUCTION

L'ÉCOULEMENT entre deux disques parallèles avec source au centre a été récemment étudié par plusieurs auteurs [1-12]. L'étude théorique la plus complète de l'écoulement laminaire entre

* Le travail exposé dans cet article est basé sur une partie de la Dissertation Doctorale de l'auteur présentée à l'Université de Paris.

† Professor of Mechanical Engineering, University of Colorado, Boulder, Colorado.

deux disques fixes est celle de Peube [1], qui a montré que le profil des vitesses est sensiblement parabolique, sauf pour des distances radiales faibles. Moller [2], au cours d'une étude expérimentale importante, a mesuré les profils des vitesses et les distributions des pressions dans des écoulements, aussi bien laminaires que turbulents, entre deux disques fixes. Dans le régime laminaire, ses résultats sont en bon accord avec l'analyse de Peube, mais Moller a remarqué que la géométrie de l'entrée est importante; si le tube d'entrée n'est pas raccordé à l'espace entre les deux disques par un divergent arrondi et lisse, l'écoulement peut décoller de la paroi et recoller plus loin. Ses résultats confirment des observations antérieures [13] montrant qu'un écoulement radial, turbulent à l'entrée, peut subir une transition inverse et devenir laminaire. Dans le régime purement turbulent, les mesures de Moller montrent que le profil des vitesses suit approximativement une loi de puissance en un septième, mais ses mesures sont limitées à un domaine de valeurs du nombre de Reynolds assez étroit et présentent des écarts appréciables. Le phénomène de transition inverse entre des disques fixes a été étudié plus en détail par l'auteur [14] et ses résultats confirment un critère de transition proposé par Peube et Cheng [8]. Hagiwara [6] a étudié théoriquement la région d'entrée où s'établit le profil des vitesses parabolique à partir d'une source uniforme, mais il n'y a pas encore de résultats expérimentaux pour confirmer son analyse.

Rice [9] et Hasinger et Kehrt [10], ont étudié expérimentalement l'écoulement entre deux disques parallèles tournant à la même vitesse avec une source au centre, dans le but de déterminer les performances de pompes et turbines sans ailettes inventées initialement par Tesla [15], il y a plus de cinquante ans, mais qui ont été prises en considération seulement récemment en relation avec certaines conditions exigées pour les véhicules spatiaux [10]. Breiter et Pohlhausen [11] ont étudié certains aspects d'un écoulement laminaire idéal entre deux disques tournant à la même vitesse, avec une source au centre; Kreith et Peube [12] ont effectué une étude théorique plus complète de ce système.

Contrairement au problème de l'écoulement entre deux disques avec source au centre qui a donné lieu à de nombreux travaux, les problèmes de transfert de masse et de chaleur dans un tel système n'ont reçu que peu d'attention, bien qu'ils semblent devoir trouver beaucoup d'applications industrielles prometteuses, comme par exemple, dans les usines de distillation de l'eau de mer à grande échelle [16]. Les travaux déjà publiés sur ces problèmes semblent se limiter aux mesures de transfert de chaleur avec de l'eau par Thomas et Cobble [17], aux résultats sur le transfert de masse de Kreith *et al.* [13], et à une étude théorique préliminaire du transfert de chaleur en écoulement laminaire [18]; il semble qu'aucun travail, expérimental ou théorique, sur le transfert de masse ou de chaleur en écoulement laminaire entre deux disques tournant à la même vitesse avec une source au centre n'ait été publié jusqu'à présent.

2. DISTRIBUTION DES VITESSES DANS UN ECOULEMENT LAMINAIRE ENTRE DEUX DISQUES PARALLELES FIXES OU TOURNANT A LA MEME VITESSE AVEC SOURCE AU CENTRE

Pour déterminer la distribution des températures et le nombre de Nusselt, il faut d'abord étudier les caractéristiques de l'écoulement. La nature de l'écoulement et la distribution des vitesses vont dépendre de manière générale de deux paramètres: un nombre de Reynolds $\rho Q/4\pi\mu a$, et dans le cas de deux disques tournant à la même vitesse, un nombre de Taylor $\rho a^2\omega/\mu$, ainsi que le montre l'analyse suivante.

Tenant compte de la symétrie du système, les équations de Navier-Stokes pour un écoulement incompressible, permanent, et sans dissipation, s'écrivent en coordonnées cylindriques (Fig. 1):

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} - \frac{\bar{v}^2}{\bar{r}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} + \nu \left[\frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{u}}{\bar{r}} \right) + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2} \right] \quad (1)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} + \frac{\bar{u}\bar{v}}{\bar{r}} = \nu \left[\frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{v}}{\bar{r}} \right) + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{z}^2} \right] \quad (2)$$

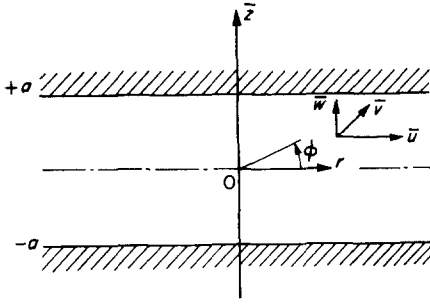


FIG. 1. Système de coordonnées.

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{r}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + \nu \left[\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{r}} \right) + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{z}^2} \right] \quad (3)$$

avec l'équation de continuité

$$\frac{\partial}{\partial \bar{r}} (\bar{r} \bar{u}) + \frac{\partial \bar{z}}{\partial} (\bar{r} \bar{w}) = 0 \quad (4)$$

Posons,

$$\begin{aligned} V_1 &= Q/4\pi a^2 & \alpha^2 &= \omega a^2/\nu \\ u &= \bar{u}/V_1 & v &= \bar{v}/V_2 \\ p &= \bar{p}/\rho V_1^2 & z &= \alpha \bar{z}/a \\ V_2 &= \sqrt{\nu \omega} & Re &= V_1 a/\nu \\ w &= \bar{w}/V_1 \\ r &= \alpha \bar{r}/a \end{aligned}$$

Les équations précédentes, écrites sous forme adimensionnelle, deviennent:

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \left(\frac{\alpha}{Re} \right)^2 \frac{v^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\alpha}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \quad (5)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} = \frac{\alpha}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] \quad (6)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\alpha}{Re} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{\partial}{\partial z} (rw) = 0 \quad (8)$$

Les conditions aux limites pour le système considéré sont

$$u(r, \pm a) = w(r, \pm a) = 0 \quad (9)$$

$$r \int_{-a}^a u \, dz = 2a^2 \quad (10)$$

$$v(r, \pm a) = r \quad (11)$$

L'équation de continuité permet de définir une fonction de courant ψ telle que

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \text{et} \quad w = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (12)$$

La solution peut alors s'écrire sous la forme suivante:

$$\psi = \frac{\alpha}{Re} \left\{ r^2 f_{-1}(z) + r f_0(z) + f_1(z) + \dots + \frac{f_n(z)}{r^{n-1}} + \dots \right\} \quad (13)$$

$$v = r g_{-1}(z) + g_0(z) + \frac{g_1(z)}{r} + \dots + \frac{g_n(z)}{r^n} + \dots \quad (14)$$

$$p = \frac{\alpha^2}{Re^2} \left\{ r^2 h_{-2}(z) + r h_{-1}(z) + h_0(z) + h(z) \ln r + \dots + \frac{h_n(z)}{r^n} + \dots \right\} \quad (15)$$

$$u = \frac{\alpha}{Re} \left\{ r f'_{-1}(z) + f'_0(z) + \frac{f'_1(z)}{r} + \dots + \frac{f'_n(z)}{r^n} + \dots \right\} \quad (16)$$

$$w = \frac{\alpha}{Re} \left\{ -2f_{-1}(z) - \frac{f_0(z)}{r} + \frac{f_2(z)}{r^3} + \dots + (n-1) \frac{f_n(z)}{r^{n-1}} + \dots \right\} \quad (17)$$

tandis que les conditions aux limites deviennent

$$f'_{-1}(\pm a) = f'_0(\pm a) = f'_1(\pm a) \\ = \dots = f'_n(\pm a) = \dots = 0 \quad (18)$$

$$f_{-1}(\pm a) = f_0(\pm a) = f_2(\pm a) \\ = \dots = f_n(\pm a) = \dots = 0 \quad (19)$$

$$g_{-1}(\pm a) = 1 \quad (20)$$

$$g_0(\pm a) = g_1(\pm a) = \dots = g_n(\pm a) = \dots = 0 \quad (21)$$

La condition de débit peut s'écrire

$$\frac{Re}{a} r \int_{-a}^a u dz = f_1(a) - f_1(-a) = 2a Re \quad (22)$$

En portant les relations ci-dessus dans les équations de Navier-Stokes, et en identifiant les termes de même puissance en r , on obtient une suite de systèmes d'équations différentielles.

On montre en détail dans les références [1] et [12] comment ces systèmes peuvent être résolus les uns après les autres. Les résultats les plus importants de cette analyse sont résumés ici.

$$f_{-1} = 0, \quad g_{-1} = 1, \quad h_{-2} = \frac{1}{2} \quad (23)$$

$$f_0 = g_0 = h_{-1} = f_2 = g_2 = h_1 = 0 \quad (24)$$

$$f_1 = \frac{A_1 - B_1}{2} \text{sh } z \cos z \\ + \frac{A_1 + B_1}{2} \text{ch } z \sin z \quad (25)$$

$$f_1 = A_1 \text{ch } z \cos z + B_1 \text{sh } z \sin z \quad (26)$$

$$f'_3 = (A_3 + B_3) \text{ch } z \cos z + (A_3 - B_3) \text{sh } z \sin z \\ - \frac{A_1^2 + B_1^2}{10} (\text{ch } 2z - \cos 2z) \\ + \frac{h}{8} [zf''_1(z) + f'_1(z)] \quad (27)$$

où

$$A_1 = 4Re a \text{sh } a \sin a / (\text{sh } 2a - \sin 2a)$$

$$B_1 = -4Re a \text{ch } a \cos a / (\text{sh } 2a - \sin 2a)$$

$$A_3 = \frac{A_1^2 + B_1^2}{10} \left[\text{sh } a \sin a - \text{ch } a \cos a \right.$$

$$\left. + 2 \text{sh } a \cos a \frac{\text{ch } 2a - \cos 2a}{\text{sh } 2a - \sin 2a} \right] \\ - \frac{h}{4} a f''_1(a) \text{sh } a \cos a / (\text{sh } 2a - \sin 2a)$$

$$B_3 = \frac{A_1^2 + B_1^2}{10} \left[\text{sh } a \sin a + \text{ch } a \cos a \right. \\ \left. - 2 \text{ch } a \sin a \frac{\text{ch } 2a - \cos 2a}{\text{sh } 2a - \sin 2a} \right]$$

$$+ \frac{h}{4} a f''_1(a) \text{ch } a \sin a / (\text{sh } 2a - \sin 2a)$$

$$h = -4Re a (\text{ch } 2a + \cos 2a) / (\text{sh } 2a - \sin 2a)$$

On peut donc écrire la vitesse radiale sous la forme suivante:

$$u = \frac{a}{r} \left\{ \frac{4a}{\text{sh } 2a - \sin 2a} (\text{sh } a \sin a \text{ch } z \cos z \right. \\ \left. - \text{ch } a \cos a \text{sh } z \sin z) + \frac{a^2 Re}{r^2} F(z, a) + \dots \right\} \quad (28)$$

où la fonction $F(z, a)$, bien qu'assez compliquée, peut être obtenue sans difficulté en principe à partir de l'équation (27). On peut remarquer qu'en première approximation, le profil des vitesses radiales est fonction seulement du nombre de Taylor. Le produit ru reste indépendant de r à un terme d'ordre $1/r^2$ près, terme négligeable pour des disques très rapprochés, sauf près du centre. En outre, l'écoulement transversal n'intervient que par des termes d'ordre $1/r^4$ et peut être considéré comme négligeable sauf près du centre.

Un cas particulier se présente lorsque $a^2 = 0$, c'est-à-dire lorsque les deux disques sont fixes. On peut facilement vérifier que, dans ce cas, l'équation (28) se réduit à

$$u = \left(\frac{a}{r}\right)^3 \frac{3}{2} \left[1 - \left(\frac{z}{a}\right)^2 \right] + \left(\frac{a}{r}\right)^3 Re \frac{3}{40} \left[1 \right. \\ \left. - \left(\frac{z}{a}\right)^2 \right] \left[z^4 - 4z^2 + \frac{5}{7} \right] \quad (29)$$

en accord avec des résultats connus [1, 3, 4].

Les profils des vitesses radiales, correspondant au premier terme de l'équation (28), sont représentés sur la Fig. 2 sous forme adimensionnelle, à savoir $u(z)/u_{\max}$ en fonction de

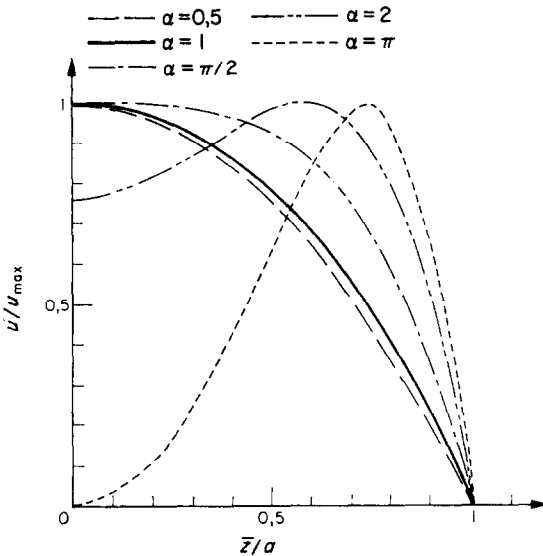


FIG. 2. Distribution adimensionnelle des vitesses radiales pour différentes valeurs de α .

z/a . On voit que pour α inférieur à 0,5 le profil est pratiquement parabolique. Pour des valeurs de α supérieures à π , le calcul prédit un retour de l'écoulement au voisinage du plan médian, mais on ne sait pas si une telle situation peut se présenter dans un système réel.

La distribution des vitesses et les propriétés caractéristiques de la transition dans un écoulement radial entre deux disques parallèles n'ont été étudié expérimentalement que dans le cas de disques fixes, c'est-à-dire pour $\alpha = 0$. Moller [2] a mesuré, dans ce cas, les profils des vitesses pour plusieurs valeurs du nombre de Reynolds, et a trouvé qu'ils étaient paraboliques, à la précision de ses mesures, tant que l'écoulement restait laminaire. Une étude des caractéristiques de la transition [14] a montré que, si l'écoulement est turbulent à l'entrée, il se produit une transition inverse qui rend l'écoulement laminaire à une distance radiale critique \bar{r}_c donnée par la relation

$$\frac{\bar{r}_c}{a} = KRe^{\frac{1}{2}} \quad (30)$$

Les mesures ont donné pour K des valeurs comprises entre 0,85 et 1,15, soit légèrement supérieures à la valeur de 0,76 pour laquelle l'étude théorique de Peube [1] montre qu'un

point d'inflexion apparaît dans le profil des vitesses. Une étude récente [19, 20] des variations qui se produisent dans l'intensité et le spectre de la turbulence lorsque l'écoulement dans un tube ou dans une couche limite avec un gradient de pression défavorable devient laminaire, montre que le processus est en fait graduel, les tourbillons correspondant aux fréquences les plus élevées étant amortis plus rapidement. Bien que les détails de ce mécanisme ne soient pas encore complètement expliqués, le résultat le plus important, du moins en ce qui concerne l'étude théorique de la convection, est que les résultats théoriques pour l'écoulement laminaire cessent d'être applicables lorsque le rapport \bar{r}/a devient inférieur à $Re^{\frac{1}{2}}$. Pour l'instant, aucune mesure précise n'a été faite dans le cas où $\alpha^2 = 0$ lorsque l'écoulement, laminaire à l'entrée, doit d'abord devenir turbulent (comme dans la région d'entrée d'une conduite aplatie [2]) avant d'effectuer une transition inverse. De même, on ne possède aucun critère de transition dans le cas de disques tournant, mais il est évident que dans ce cas, le nombre de Taylor, comme le nombre de Reynolds, entrera en jeu.

3. TRANSFERT DE MASSE ET DE CHALEUR PAR CONVECTION DANS UN ECOULEMENT RADIAL LAMINAIRE ENTRE DEUX DISQUES TOURNANT A LA MEME VITESSE

L'équation de l'énergie pour un écoulement permanent, incompressible, laminaire et non dissipatif, s'écrit, dans le système de coordonnées cylindriques représenté sur la Fig. 1 :

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{v}}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \phi} + \bar{w} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{z}} \\ = \frac{k}{\rho c_p} \left[\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} \right) + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{z}^2} \right] \end{aligned} \quad (31)$$

en supposant les propriétés physiques du fluide constantes.

On obtient l'équation correspondant au transfert de masse d'un composant A en remplaçant simplement la température \bar{T} par la concentration \bar{c} , et la diffusivité thermique $(k/\rho c_p)$ par le coefficient \mathcal{D}_v de diffusion moléculaire du composant A dans le fluide [22, 23]. Dans un écoulement à symétrie de révolution, les dérivées de quantités scalaires par

rapport à ϕ sont nulles. L'analyse précédente montre que, pour un profil des vitesses bien établi, c'est-à-dire pour de grandes valeurs de \bar{r}/a , l'écoulement transversal perpendiculaire aux disques est négligeable, soit $w = 0$. En outre, Singh [24] a montré que la conduction dans la direction de l'écoulement est négligeable vis à vis de la conduction dans la direction perpendiculaire aux disques, si le nombre de Reynolds est égal ou supérieur à $50/Pr$ dans le cas du transfert de chaleur, et à $50/Sc$ dans le cas du transfert de masse. Ainsi, sauf pour des nombres de Prandtl ou de Schmidt très petits, on a

$$|\partial^2 \bar{T} / \partial \bar{r}^2| \ll |\partial^2 \bar{T} / \partial \bar{z}^2|$$

et

$$|\partial^2 \bar{c} / \partial \bar{r}^2| \ll |\partial^2 \bar{c} / \partial \bar{z}^2|$$

L'écoulement transversal étant négligeable, l'équation de continuité peut s'écrire:

$$u = \frac{\bar{u}}{Q/4\pi a^2} = \frac{a}{\bar{r}} f(\bar{z}) = \frac{a}{r} f(\bar{z}) \quad (32)$$

où la fonction $f(\bar{z})$, qui donne le profil des vitesses radiales, vérifie

$$\frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(\bar{z}) d\bar{z} = 1$$

En portant l'équation (32) dans l'équation (31) et en utilisant les hypothèses simplificatrices présentées plus haut, on obtient l'équation

$$Re Pr f(\bar{z}) \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} = \frac{\partial^2 T}{\partial \bar{z}^2} \quad (33)$$

où

$$Re = \rho Q / 4\pi \mu a \text{ et } Pr = \mu c_p / k$$

L'équation (33) gouverne la distribution des températures dans un écoulement radial à symétrie de révolution entre deux disques parallèles. L'équation correspondant au transfert de masse est

$$Re Sc f(\bar{z}) \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{r}} = \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial \bar{z}^2}$$

où

$$Sc = \mu / \rho \mathcal{D}_v$$

Pour déterminer le flux de transfert de chaleur ou de masse, il faut résoudre les équations précédentes avec le profil des vitesses et les conditions initiales et aux limites convenables.

Si l'on introduit les variables sans dimensions suivantes:

$$x = (\bar{r}^2 - \bar{r}_1^2) / 2Re Pr a^2, \quad y = \bar{z} / a$$

et

$$T = (\bar{T} - \bar{T}_p) / (\bar{T}_o - \bar{T}_p)$$

où \bar{T}_o est la température initiale à $\bar{r} = \bar{r}_1$, et \bar{T}_p est la température de référence du disque, l'équation (33) devient

$$f(y) \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (34)$$

avec

$$\int_{-1}^1 f(y) dy = 2$$

L'équation correspondante, pour le transfert de masse, s'obtient facilement au moyen des transformations conduisant à l'équation (34).

Calcul du nombre de Nusselt moyen en écoulement laminaire

Pour calculer la distribution des températures et le flux de chaleur dans le cas de deux disques tournant à la même vitesse, on doit résoudre l'équation (34) avec

$$f(y) = \frac{4a}{\text{sh } 2a - \sin 2a} [\text{sh } a \sin a \text{ ch } ay \cos ay - \text{ch } a \cos a \text{ sh } ay \sin ay].$$

Si la température du fluide à l'entrée est uniforme, la solution doit vérifier la condition initiale:

$$T(0, y) = 1.$$

En outre, si le disque inférieur est à une température uniforme donnée \bar{T}_p , on a la condition aux limites

$$T(x, -1) = 0.$$

En ce qui concerne le disque supérieur, deux conditions aux limites, les plus importantes du point de vue pratique, sont à envisager:

(a) $T(x, 1) = 0$ les deux disques sont à la même température \bar{T}_p .

(b) $(\partial T/\partial y)(x, 1) = 0$ le disque supérieur est thermiquement isolé.

Dans les deux cas, nous voulons calculer le nombre de Nusselt moyen défini par

$$\begin{aligned} \overline{Nu}(x_2) &= \frac{2a\bar{h}}{k} \\ &= \frac{1}{x_2} \int_0^{x_2} \left\{ \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=-1} - \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=+1} \right\} dx. \end{aligned} \quad (35)$$

Le coefficient de transfert de chaleur moyen \bar{h} est aussi donné par

$$\begin{aligned} \bar{h} &= \frac{q}{2\pi(\bar{r}_2^2 - \bar{r}_1^2)(\bar{T}_p - \bar{T}_o)} \\ &= -\frac{k}{2a} \frac{1}{x_2} \left[\int_{-1}^{+1} f(y)T(x_2, y) dy - 2 \right]. \end{aligned}$$

Si \bar{h} est connu, on peut calculer directement le flux de chaleur entre le fluide et les disques à partir des données du système. Les solutions de l'équation (34) ont été obtenues, pour différentes valeurs du nombre de Taylor α^2 comprises entre 0 et π^2 , en introduisant un opérateur intégral qui possède des fonctions propres orthogonales et normalisables à la condition que $f(y)$ ne soit pas négatif dans l'intervalle $|y| \leq 1$. Le nombre de Nusselt s'exprime alors directement en fonction de la solution, sous forme de série, de l'équation (34).

La méthode de séparation des variables donne des solutions de l'équation (34) sous la forme

$$T = Y(y)X(x) \quad (36)$$

avec

$$X = \text{const. exp}[-x/\mu] \quad (37)$$

et

$$Y'' = -\frac{1}{\mu} f(y) Y(y) \quad (38)$$

où μ est une constante.

Les conditions aux limites pour $y = \pm 1$ se traduisent par

$$Y(-1) = 0$$

$$Y(+1) = 0 \text{ dans le cas (a)}$$

ou

$$Y'(+1) = 0 \text{ dans le cas (b)}$$

En intégrant formellement l'équation (38), et en tenant compte des conditions aux limites ci-dessus, on obtient

$$Y(y) = -\frac{1}{\mu} \left\{ \int_{-1}^y \int_{+1}^{y'} f(y'') Y(y'') dy'' dy' + \frac{A}{2} (y + 1) \right\}$$

où

$$A = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^{y'} f(y'') Y(y'') dy'' dy' \text{ dans le cas (a)}$$

$$A = 0 \text{ dans le cas (b).}$$

Soit L l'opérateur intégral défini par

$$L(q) = - \int_{-1}^y \int_{+1}^{y'} f(y'') q(y'') dy'' dy' - \frac{A}{2} (y + 1) \quad (39)$$

et ϕ_k et μ_k , $k = 1, 2, 3 \dots$, ses fonctions propres et valeurs propres. On a

$$L(\phi_k) = \mu_k \phi_k \quad (40)$$

et

$$\frac{d^2 L(\phi_k)}{dy^2} = \mu_k \phi_k''(y) = -f(y) \phi_k(y)$$

L'intégration par parties de

$$\int_{-1}^{+1} f(y) \phi_k(y) \phi_j(y) dy$$

montre, en raison de la symétrie de

$$\int_{-1}^{+1} \phi_k'(y) \phi_j'(y) dy$$

en j et k , que l'on a :

$$\left(\frac{1}{\mu_k} - \frac{1}{\mu_j} \right) \int_{-1}^1 f(y) \phi_k(y) \phi_j(y) dy = 0$$

Ce qui montre que $\phi_j(y)$ et $\phi_k(y)$ sont orthogonales par rapport à la fonction de poids $f(y)$ et sont donc aussi normalisables.

Si nous définissons le produit intérieur, relatif à l'opérateur intégral considéré, et pour les fonctions définies sur $|y| \leq 1$, par

$$(h, q) = \int_{-1}^{+1} f(y) h(y) q(y) dy$$

toute fonction peut alors être représentée par une série de Fourier généralisée :

$$h(y) = \sum_{k=1}^{\infty} (h, \phi_k) \phi_k(y)$$

On peut donc, en tenant compte de la condition initiale, écrire la solution de l'équation (34) sous la forme suivante :

$$T(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (1, \phi_k) \phi_k(y) \exp [-x/\mu_k] \tag{41}$$

Le problème se ramène ainsi à trouver les fonctions propres ϕ_k , les valeurs propres μ_k et les coefficients de Fourier généralisés $(1, \phi_k)$. Les calculs ont été faits par le Docteur G. J. Culler de l'Université de Californie à St. Barbara, suivant la méthode dite de puissance.

Le nombre de Nusselt s'obtient alors de la manière suivante. Des équations (40) et (41) on déduit

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial y} = \frac{1}{\mu_k} \frac{\partial}{\partial y} [L(\phi_k)] \tag{42}$$

et

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \sum_{k=1}^{\infty} (1, \phi_k) \frac{\partial \phi_k}{\partial y} \exp [-x/\mu_k] \tag{43}$$

Mais, d'après l'équation (39)

$$\frac{\partial}{\partial y} L(\phi_k) = \int_y^1 f(y) \phi_k(y) dy - \frac{A_k}{2} \tag{44}$$

ce qui entraîne

$$\left. \frac{\partial \phi_k}{\partial y} \right|_{y=1} = \frac{1}{\mu_k} \int_y^1 f(y) \phi_k(y) dy - \frac{A_k}{2\mu_k} \tag{45}$$

et

$$\left. \frac{\partial \phi_k}{\partial y} \right|_{y=1}^{-1} = -\frac{A_k}{2\mu_k} \tag{46}$$

Utilisant les équations (43), (45) et (46), l'équation (35) donne

$$\begin{aligned} \overline{Nu} &= \frac{1}{x_2} \int_0^{x_2} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (1, \phi_k) \left[\left. \frac{\partial \phi_k}{\partial y} \right|_{y=1} - \left. \frac{\partial \phi_k}{\partial y} \right|_{y=1} \right] \right\} \exp [-x/\mu_k] dx \\ &= \frac{1}{x_2} \sum_{k=1}^{\infty} (1, \phi_k) \int_{-1}^{+1} f(y) \phi_k(y) dy \int_0^{x_2} \frac{\exp [-x/\mu_k]}{\mu_k} dx \end{aligned} \tag{47}$$

Mais, puisque,

$$\int_{-1}^1 f(y) \phi_k(y) dy = (1, \phi_k)$$

on obtient

$$\overline{Nu} = \frac{1}{x_2} \sum_{k=1}^{\infty} (1, \phi_k)^2 (1 - \exp [-x_2/\mu_k])$$

De plus, puisqu'on peut écrire

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1, \phi_k) \phi_k(y) = 1$$

on en déduit

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(y) dy &= \sum_{k=1}^{\infty} (1, \phi_k) \int_{-1}^1 f(y) \phi_k(y) dy \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (1, \phi_k)^2 \end{aligned}$$

D'où l'expression finale du nombre de Nusselt moyen

$$\overline{Nu}(x_2) = \frac{1}{x_2} \left[2 - \sum_{k=1}^{\infty} (1, \phi_k)^2 \exp (-x_2/\mu_k) \right] \tag{48}$$

Le tableau 1 donne les valeurs propres et les coefficients correspondants pour les trois premiers termes des séries ci-dessus, pour des valeurs de a^2 comprises entre 0 et π^2 , et pour les conditions aux limites correspondant aux cas (a) et (b).

Afin d'établir la précision de la méthode de calcul, le nombre de termes à prendre, et l'exactitude de tous les sous-programmes utilisés, les calculs ont été d'abord effectués dans le cas artificiel d'un profil des vitesses uniforme, c'est-à-dire avec $f(y) = 1$. Dans ce cas, il est possible de calculer les séries analytiquement, par une décomposition en série de Fourier. On obtient, dans le cas (a),

Tableau 1. Valeurs propres et coefficients de Fourier generalisés pour le calcul du nombre de Nusselt moyen dans un écoulement laminaire entre deux disques parallèles tournant à la même vitesse et avec source au centre

Cas (a) $T(x, 1) = T(x, -1) = 0$

k	α = 0		α = 1		α = 2		α = π	
	(1, φ _k)	λ _k	(1, φ _k)	λ _k	(1, φ _k)	λ _k	(1, φ _k)	λ _k
1	1,3493	1,3730	1,3468	1,3829	1,3232	1,5205	1,3165	1,9136
2	0		0		0		0	
3	0,3260	4,6	0,3320	4,6180	0,3831	4,5990	0,3887	5,3831
4	0		0		0		0	
5	0,1748	7,8940	0,1782	7,8696	0,2071	7,7195	0,2170	8,8679

Cas (b) $T(x, 1) = \frac{\partial T}{\partial y}(x, -1) = 0$

k	α = 0		α = 1		α = 2		α = π	
	(1, φ _k)	λ _k	(1, φ _k)	λ _k	(1, φ _k)	λ _k	(1, φ _k)	λ _k
1	1,3383	0,77949	1,33519	0,78015	1,29546	0,78481	1,20078	0,77491
2	0,3478	2,4285	0,3596	2,4185	0,4450	2,3430	0,6572	2,3994
3	0,1901	4,0670	0,1939	4,0511	0,2241	3,9629	0,1394	4,4581
4			0,1307	5,6814	0,1533	5,5550	0,2265	5,8904
5			0,0973	7,3107	0,1135	7,1526	0,0710	7,9809

$$\overline{Nu} = \frac{1}{x_2} \left\{ 2 - \sum (1, \phi_k)^2 \exp[-\lambda_k x_2] \right\}$$

$$\overline{Nu} = \frac{1}{x^2} \left\{ 2 - \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \exp \left[-\frac{(2n+1)^2}{4} \pi^2 x_2 \right] \right\} \quad (49)$$

et dans le cas (b),

$$\overline{Nu} = \frac{1}{x^2} \left\{ 2 - \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \exp \left[-\frac{(2n+1)^2}{16} \pi^2 x_2 \right] \right\} \quad (50)$$

On a trouvé que la solution fournie par la calculatrice était en accord avec la série de Fourier avec une précision de cinq chiffres significatifs et que trois termes suffisaient pour calculer \overline{Nu} avec une erreur inférieure à deux pour cent, ceci pour tout le domaine de valeurs de x_2 intéressant en pratique.

Les résultats analytiques sont représentés graphiquement sur les Fig. 3 et 4 qui donnent le nombre de Nusselt moyen en fonction de la variable sans dimensions $[RePr\alpha^2/(\bar{r}_2^2 - \bar{r}_1^2)]$, respectivement dans les cas (a) et (b).

Dans le cas (a), et pour $\alpha = 0$, les valeurs propres sont en accord avec celles données dans les références [25-27] où l'équation (35) a été résolue pour un profil de vitesses parabolique, un tel profil étant le cas limite du profil des vitesses donné par l'équation (28) lorsque α^2 tend vers zéro.

L'application à d'autres conditions aux limites est aussi possible, dans ce cas, grâce au principe de superposition discuté dans la référence [28].

4. NOMBRES DE NUSSOLT ET DE SHERWOOD MOYENS DANS UN ECOULEMENT RADIAL TURBULENT ENTRE DEUX DISQUES FIXES

Comme nous l'avons déjà indiqué, à des distances radiales inférieures à la distance

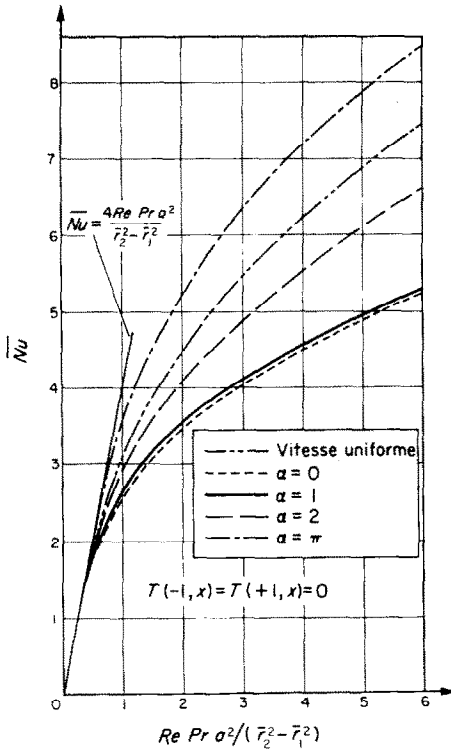


FIG. 3. \bar{Nu} en fonction de $Re Pr a^2 / (\bar{r}_2^2 - \bar{r}_1^2)$ dans le cas (a) et pour différentes valeurs de α .

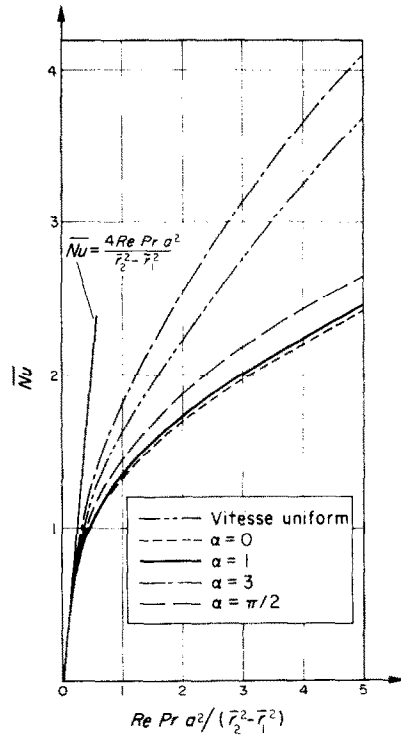


FIG. 4. \bar{Nu} en fonction de $Re Pr a^2 / (\bar{r}_2^2 - \bar{r}_1^2)$ dans le cas (b) et pour différentes valeurs de α .

critique \bar{r}_c donnée par (30), l'écoulement peut être turbulent et les expressions du nombre de Nusselt trouvées au chapitre précédent cessent alors d'être applicables. Pour prédire le nombre de Nusselt en écoulement turbulent, il faut adopter une approche semi-empirique reliée à des expériences.

On ne dispose pas pour l'instant de données expérimentales concernant le transfert de chaleur par convection dans un écoulement de source entre deux disques tournant, mais les résultats sur le transfert de masse présentés dans la référence [13] peuvent servir, grâce à l'analogie entre transfert de masse et transfert de chaleur, à obtenir une expression empirique pour le nombre de Nusselt moyen dans le cas d'un écoulement turbulent bien établi entre deux disques fixes.

Au départ les résultats originaux des références [13] et [31] ont été analysés en ne retenant que les points obtenus dans des conditions telles que

$\bar{r}_2/a < Re^{1/2}$, avec les deux disques fixes. Une analyse dimensionnelle montre que les paramètres sans dimensions appropriés sont les suivants: $k_c 2a / \mathcal{D}_v$, $\rho Q / 4\pi a \mu$, a / \bar{r}_2 et $\mu / \rho \mathcal{D}_v$. Mais, puisque le nombre de Schmidt $\mu / \rho \mathcal{D}_v$ était constant et égal à 2,4 dans toutes les expériences, son influence n'a pu être déterminée dans cette étude corrélatrice.

On a tout d'abord établi la relation entre le nombre de Sherwood moyen ($\bar{Sh} = \bar{k}_c 2a / \mathcal{D}_v$) et le nombre de Reynolds ($Re = \rho Q / 4\pi a \mu$) en portant sur un diagramme \bar{Sh} en fonction de Re pour des valeurs constantes de a / \bar{r}_2 . La Fig. 5 montre qu'il existe une relation de la forme

$$\bar{Sh} = c_1 Re^{0,8} \quad (51)$$

pour toutes les valeurs de a / \bar{r}_2 considérées.

Puis on a établi la relation entre \bar{Sh} et a / \bar{r}_2 en portant à nouveau les résultats de la Fig. 5 sur un autre diagramme, pour des valeurs constantes

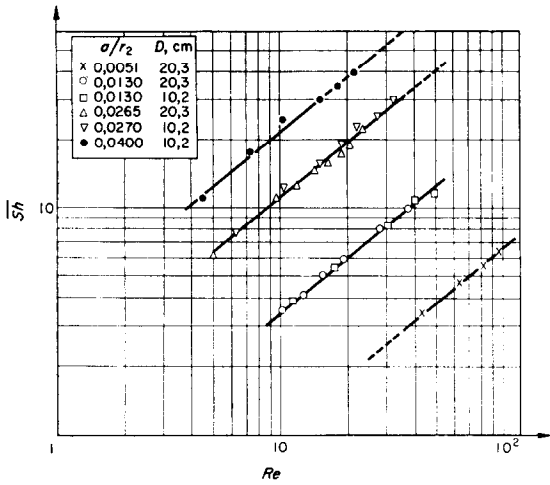


FIG. 5. \overline{Sh} en fonction de Re .

de Re . La Fig. 6 montre qu'il existe une relation de la forme

$$\overline{Sh} = c_2(a/\bar{r}_2)^{1,6} \quad (52)$$

Il est donc possible de corréler tous les résultats par la formule

$$\overline{Sh} = c_3 [2Re(a/\bar{r}_2)^2]^{0,8} \quad (53)$$

où $c_3 = 1,3$, comme le montre la Fig. 7.

Dans ces expériences, la surface d'un seul disque était recouverte de naphthalène; c'est l'analogie, pour le transfert de chaleur, du cas où une surface est à une température uniforme donnée et l'autre surface est isolée (cas b). Cependant, étant donné qu'en écoulement

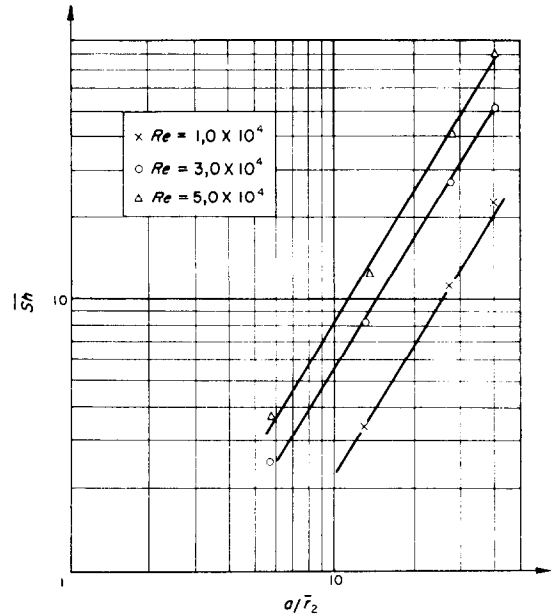


FIG. 6. \overline{Sh} en fonction de (a/\bar{r}_2) .

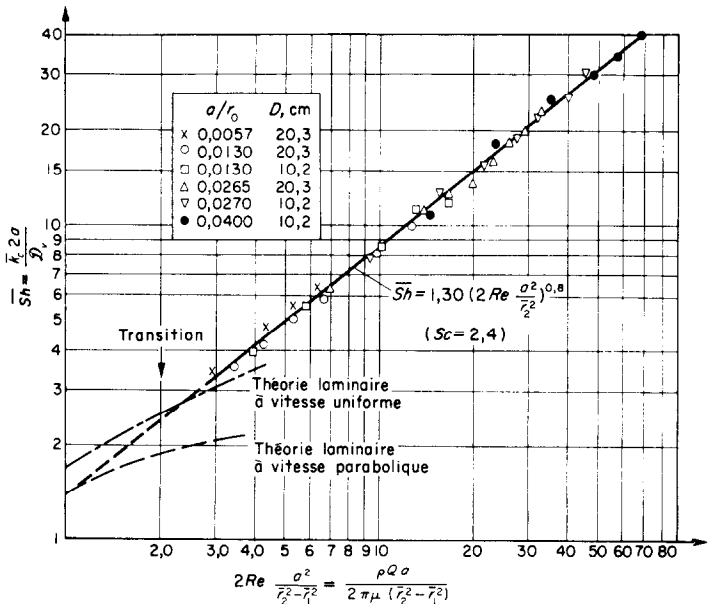


FIG. 7. \overline{Sh} en fonction de $2Re a/(\bar{r}_2^2 - \bar{r}_1^2)$.

turbulent la résistance principale est localisée dans une couche de fluide près de la paroi tant que le nombre de Prandtl ou de Schmidt n'est pas trop petit [21], l'influence de l'autre condition aux limites sur la densité de flux de chaleur ou de masse à la paroi est très faible. Par conséquent, la relation empirique pour le transfert de masse avec les deux parois à un même potentiel uniforme peut s'écrire :

$$\bar{Sh} = 2,6 [2Re(a/\bar{r}_2)^2]^{0,8}$$

A l'aide de l'analogie entre transfert de masse et transfert de chaleur en écoulement turbulent [23], le nombre de Nusselt moyen dans un système où les deux parois sont à une température uniforme peut donc s'écrire approximativement

$$\bar{Nu}_t = 1,28 [2Re Pr a^2/\bar{r}_2^2]^{0,8} / (Pr^{0,47}). \quad (54)$$

L'équation (54) permet aussi d'évaluer le nombre de Nusselt moyen dans le cas d'un régime d'écoulement mixte où l'écoulement est turbulent pour $\bar{r} < r_c$ et laminaire entre \bar{r}_c et \bar{r}_2 . Si l'on suppose $\bar{r}_1 < \bar{r}_c$ et que la transition inverse se produise entièrement à $\bar{r} = \bar{r}_c$, le nombre de Nusselt moyen est alors donné par

$$\bar{Nu} = [(\bar{r}_c^2 - \bar{r}_1^2)Nu_t + (\bar{r}_2^2 - \bar{r}_c^2)Nu_l] / (\bar{r}_2^2 - \bar{r}_1^2) \quad (55)$$

où \bar{Nu}_t est le nombre de Nusselt moyen en écoulement turbulent et peut être calculé à

partir de (54) en faisant $\bar{r}_2 = \bar{r}_c$ et où Nu_l est le nombre de Nusselt moyen en écoulement laminaire et peut être évalué à l'aide de la Fig. 3 en faisant $\bar{r}_1 = \bar{r}_c$.

En réalité, il est probable que la transition se produit de manière graduelle et que la disparition complète de la turbulence demande, pour se faire, une certaine distance non nulle. Il faut noter cependant que, alors qu'en écoulement purement laminaire ou purement turbulent seul le rapport $(\bar{r}_2^2 - \bar{r}_1^2)/a^2$ est important, dans le régime d'écoulement mixte le nombre de Nusselt moyen peut varier aussi avec l'écartement des deux disques.

5. VERIFICATION EXPERIMENTALE DE LA SOLUTION ANALYTIQUE POUR UN NOMBRE DE TAYLOR NUL

On a vérifié expérimentalement la solution analytique valable dans le cas d'un écoulement laminaire entre deux disques fixes à la même température (cas a), ($\alpha = 0$) au moyen de l'appareil représenté schématiquement sur la Fig. 8. L'air comprimé après son passage dans un détendeur, puis dans un rotamètre permettant de mesurer le débit, arrive par l'intermédiaire d'une vanne dans le tube d'entrée et dans une chambre de tranquillisation, directement au-dessus de l'appareil. On mesure la température de l'air au moyen d'un thermocouple placé à l'extrémité du tube d'entrée. L'air pénètre alors

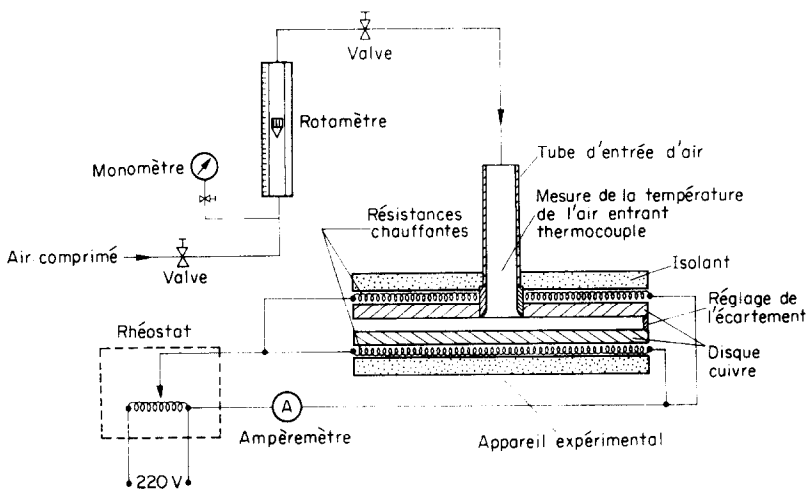


FIG. 8. Schéma du dispositif expérimental.

dans l'espace séparant les deux disques à travers une section arrondie raccordant le tube d'entrée au disque supérieur.

L'appareil est constitué de deux disques de cuivre de 2 cm d'épaisseur et 45 cm de diamètre. Les faces des disques en contact avec l'air ont été usinées de manière à les rendre parfaitement planes et lisses. Une spirale chauffante en thermocoax, d'une résistance électrique totale de 5 Ω à la température ambiante, est placée sur la face externe de chaque disque et maintenue pressée contre cette face au moyen d'une plaque supplémentaire en aluminium. Pour réduire les fuites thermiques vers l'extérieur, l'ensemble est recouvert d'un isolant en mousse plastique de 4 cm d'épaisseur.

Un rhéostat permet de faire varier la tension appliquée au fils chauffants de thermocoax de 0 à 100 V, et par là de contrôler la température des disques. L'intensité et la tension du courant sont mesurées indépendamment l'une de l'autre.

La température de la face de chaque disque en contact avec l'air est mesurée en cinq points au moyen de thermocouples cuivre-constantan. Chaque thermocouple est appliqué au fond d'un trou ouvert sur la face extérieure du disque, à environ 0,3 cm de la surface intérieure. Etant donnée la grande conductivité thermique du cuivre, on peut négliger la différence de température entre l'emplacement des thermocouples et la surface intérieure du disque. Les disques de cuivre ont été aussi choisis suffisamment épais pour que la conduction dans la masse du disque produise une température pratiquement uniforme sur toute la surface, en accord avec la condition aux limites utilisée dans l'étude théorique.

L'écartement des disques peut être réglé à différentes valeurs au moyen de 3 petites cales. Ces cales sont placées au-delà du rayon extérieur des disques dans des "oreilles" prévues spécialement et usinées avec la surface du disque. Le fait que ces cales soient placées à l'extérieur des disques permet d'éviter une interaction gênante avec l'écoulement radial entre les disques, là où l'air s'échauffe.

Le rotamètre, la sonde de pression et les thermocouples sont étalonnés avant de commencer les expériences. On a évalué l'erreur sur le débit à $\pm 4\%$, et l'erreur sur la température à

± 1 degC. Une analyse de la précision des résultats expérimentaux, faite en considérant des intervalles d'incertitude basés sur des chances de 20 contre 1 [28], montre que la précision sur les valeurs expérimentales du nombre de Nusselt \overline{Nu} ou du coefficient de transfert de chaleur moyen est de $\pm 15\%$ alors que la précision sur les valeurs du paramètre $Re Pr a^2 / (\bar{r}_2^2 - \bar{r}_1^2)$ est de $\pm 5\%$, dans le cas de la méthode de mesure décrite plus loin. Cette précision limitée est en grande partie due à la difficulté d'obtenir un état d'équilibre. La grande capacité thermique des disques de cuivre rend la constante de temps du système très importante, et pour certains points expérimentaux la période transitoire a duré 10 h. Comme, au cours de ce temps, la température et la pression d'alimentation de l'air varient, il en résulte une incertitude des mesures assez grande comme le montrent les résultats ci-dessus.

Pour la détermination expérimentale du nombre de Nusselt défini par l'équation (37), nous avons utilisé la procédure suivante.

Les deux disques sont tout d'abord placés l'un contre l'autre, l'écartement étant donc nul. Dans ces conditions, c'est-à-dire en l'absence d'écoulement, toutes les pertes de chaleur sont dues à la convection libre et au rayonnement, dans le milieu ambiant, de la surface externe de l'isolant placé sur les disques. Ces pertes sont inévitables et existent aussi lors des expériences avec écoulement radial. Quantitativement, elles ne dépendent que de la différence de température entre les disques et l'air extérieur ambiant. Le système étant dans ces conditions, on fait passer un courant dans la résistance de chaque disque et l'on mesure la puissance dissipée, c'est-à-dire l'intensité et la tension du courant, pour chaque disque séparément. Lorsque la température des disques, donnée par les cinq thermocouples de chaque disque, atteint une valeur d'équilibre, on mesure les pertes de chaleur vers l'extérieur et la différence de température entre les disques et l'air. On refait la même opération pour des valeurs croissantes de la puissance dissipée, et l'on obtient ainsi la correction sur les pertes de chaleur.

Pour les expériences proprement dites, avec écoulement, on maintient constantes pendant la durée des mesures les valeurs, choisies à l'avance,

de l'écartement des disques, du débit et de la puissance dissipée. On observe l'évolution dans le temps de la température des disques et de celle de l'air entrant; lorsque l'état d'équilibre est atteint, on note la température des disques pour la puissance totale dissipée considérée. Le coefficient moyen de transfert de chaleur se calcule alors au moyen de l'équation

$$\bar{h}_c = \frac{Q_{\text{total}} - Q_{\text{pertes}}}{2\pi(\bar{r}_2^2 - \bar{r}_1^2)(\bar{T}_p - \bar{T}_0)} \quad (56)$$

Les résultats de ces expériences sont présentés en détail dans la référence [30] et sur la Fig. 9 qui donne le nombre de Nusselt moyen en fonction du paramètre sans dimensions

$$Re Pr a^2 / (\bar{r}_2^2 - \bar{r}_1^2).$$

La solution analytique dans le cas (b), c'est-à-dire lorsqu'une surface est à un potentiel uniforme et l'autre isolée, a été vérifiée par des expériences de transfert de masse. L'appareil utilisé pour ces expériences, ainsi que la technique des mesures, sont décrits en détail dans les références [22] et [13]. Un seul changement fut introduit afin d'éliminer l'influence de la région d'entrée dont on ne tient pas compte dans la solution analytique, cette dernière supposant des profils de vitesses semblables pour \bar{r} compris entre \bar{r}_1 et \bar{r}_2 . Afin de supprimer tout transfert

de masse dans la région d'entrée, la couche de naphthalène, dont un des disques est recouvert, a été peinte avec une laque imperméable au transfert de masse, sur une région circulaire s'étendant du centre jusqu'à une distance radiale de 3,8 cm. Le diamètre des disques étant de 20,3 cm, les dimensions de la surface active sont $\bar{r}_1 = 3,8$ cm et $\bar{r}_2 = 10,15$ cm.

Les résultats de ces expériences, effectuées pour des valeurs de l'écartement des deux disques de 0,13 cm et 0,32 cm, sont comparés avec la solution analytique de (34) sur la Fig. 10. On a également représenté sur cette figure la relation semi-empirique valable pour la région turbulente avec un nombre de Schmidt de 2,4 qui, pour la géométrie considérée, donne

$$\bar{Sh} = 0,565 \left(2Re Sc \frac{a^2}{\bar{r}_2^2 - \bar{r}_1^2} \right)^{0,8} \quad (57)$$

On trouve que la transition apparaît dans le système lorsque la valeur du paramètre

$$2Re Sc a^2 / (\bar{r}_2^2 - \bar{r}_1^2)$$

dépasse environ 1,4, ce qui correspond à une valeur de K , dans l'équation (30), d'environ 0,8. L'écoulement est entièrement turbulent quand $2Re Sc a^2 / (\bar{r}_2^2 - \bar{r}_1^2)$ atteint environ 7, ce qui correspond approximativement à une valeur de K égale à 1,2. Le tube d'entrée étant très petit,

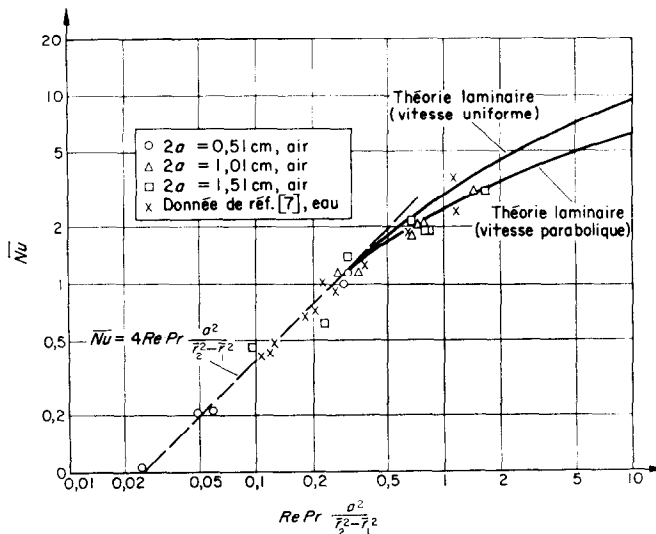


FIG. 9. Résultats expérimentaux dans le cas (a) et pour $\alpha = 0$.

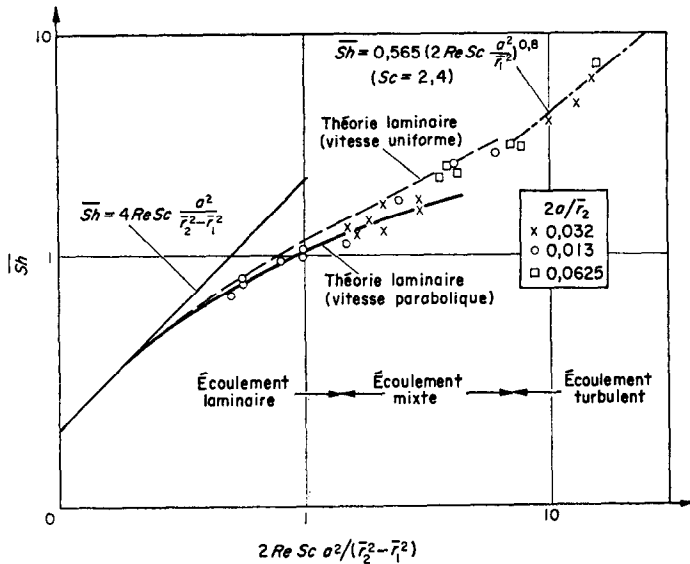


FIG. 10. Résultats expérimentaux dans le cas (b) et pour $\alpha = 0$.

l'écoulement arrive turbulent et le critère de transition suggéré dans la référence [14] devrait être applicable.

6. DISCUSSION DES RESULTATS

L'étude théorique, présentée au Paragraphe 3, du transfert de masse et de chaleur par convection dans un écoulement laminaire entre deux disques parallèles tournant à la même vitesse avec une source au centre montre que les nombres moyens de Nusselt et de Sherwood dépendent de deux paramètres: un nombre de Taylor $a^2 = \omega a^2/\nu$ et un nombre de Péclet modifié $Re Pr a^2/(\bar{r}_2^2 - \bar{r}_1^2)$ ou $Re Sc a^2/(\bar{r}_2^2 - \bar{r}_1^2)$. Les calculs ont été faits pour des nombres de Taylor compris entre 0 et π^2 , c'est-à-dire dans le domaine de valeurs de a^2 où le calcul prédit l'absence d'écoulement de retour. Les résultats présentés sur les Figs. 3 et 4 montrent que les coefficients de transfert de masse et de chaleur augmentent avec le nombre de Taylor, mais qu'ils deviennent indépendants du profil des vitesses lorsque $Re Pr a^2/(\bar{r}_2^2 - \bar{r}_1^2)$ devient inférieur à 0,2. L'analyse est basée sur un développement en série de la solution, valable pour de grandes valeurs de r , mais seul le premier terme de la série est utilisé. Ce terme donne le profil des vitesses radiales et il montre que la

forme de ce profil ne dépend pas de la distance radiale. Les termes d'ordre supérieur correspondent à une modification de la forme de ce profil avec r , mais les corrections, dans le cas de disques très rapprochés, ne sont appréciables qu'à de très petites distances radiales. Pour des nombres de Taylor inférieurs à environ 0,25, la distribution des vitesses radiales est pratiquement parabolique et l'on peut alors utiliser les résultats d'études précédentes pour comparer les valeurs propres et les coefficients qui entrent dans le calcul des nombres moyens de Nusselt et de Sherwood.

Deux conditions aux limites présentant un intérêt pratique ont été prises en considération: dans le cas (a), les deux surfaces sont à un potentiel uniforme et, dans le cas (b), une surface est à un potentiel uniforme et l'autre isolée.

Des expériences ont été effectuées pour $\alpha^2 = 0$, afin de vérifier l'analyse. Dans les expériences de transfert de chaleur, dans le cas (a), l'écoulement à l'entrée est complètement laminaire et, par conséquent, une partie de la veine d'essai comprend la région où le profil des vitesses s'établit. Une étude approchée par Hagiwara [6] montre que le profil des vitesses, dans un écoulement laminaire entre deux disques fixes, s'approche de la forme parabolique

à $\pm 2\%$ à une distance radiale \bar{r}_p donnée par

$$\frac{\bar{r}_p}{\bar{r}_1} = 1 + (a Re^{\frac{1}{2}}/8\bar{r}_1)$$

L'écoulement à l'entrée semble avoir peu d'influence sur le nombre de Nusselt moyen, comme le montre la Fig. 9 où les résultats expérimentaux sont comparés à l'analyse. On voit sur cette figure que les mesures sont en accord avec la théorie, à la précision près des mesures, pour les valeurs de $Re a^2/(\bar{r}_2^2 - \bar{r}_1^2)$ comprises entre 0,02 et 1,5. Pour des valeurs supérieures, l'écoulement à l'entrée devient turbulent car le nombre de Reynolds dans le tube d'arrivée d'air dépasse alors 2300; l'écoulement reste alors turbulent dans tout l'espace entre les deux disques puisque \bar{r}/a est partout inférieur à $Re^{\frac{1}{2}}$ [14].

Dans le cas (b), une vérification expérimentale a été obtenue par des mesures de transfert de masse. Le tube d'arrivée de l'air étant très petit, l'écoulement à l'entrée était turbulent ce qui a permis de vérifier le critère de transition proposé par l'auteur dans la référence [14]. De plus, l'influence de la région d'entrée a pu être éliminée très facilement, comme cela a été décrit plus haut. La Fig. 10 montre les résultats expérimentaux et l'on observe à nouveau un bon accord entre la théorie et l'expérience dans le régime laminaire.

Dans le régime d'écoulement mixte, les valeurs mesurées du nombre de Sherwood moyen sont supérieures aux valeurs théoriques, comme on s'y attend. Quand le rayon de transition est égal ou supérieur au rayon extérieur du disque, l'écoulement est entièrement turbulent et les valeurs mesurées de \overline{Sh} sont en bon accord avec la relation empirique développée au Paragraphe 4.

Dans la seule autre étude expérimentale des phénomènes de transfert en écoulement radial entre deux disques parallèles [17], les auteurs comparent leurs résultats avec une analyse basée sur l'hypothèse d'un écoulement laminaire et d'un profil des vitesses uniforme (49). Il n'y a accord entre les deux qu'à $\pm 60\%$, mais puisque la dispersion des points expérimentaux atteint $\pm 50\%$, on pourrait se croire en droit, à première vue, d'attribuer l'écart entre la théorie et l'expérience aux erreurs expérimentales. Cepen-

dant, même l'accord relatif qui existe entre l'analyse et les résultats expérimentaux de la référence [17] est en fait dû à une circonstance fortuite.

Dans la référence [17], les valeurs du paramètre $(\rho Q/4\pi\mu a)(a^2/\bar{r}^2)$ sont comprises entre 0,024 et 2,4 quand \bar{r} est le rayon d'entrée, et entre 0,6 et 60,0 quand \bar{r} est le rayon extérieur. En conséquence du critère de transition donné par l'équation (30), il apparaît que dans la plupart des cas, les conditions sont celles d'un régime d'écoulement mixte. Pour les plus grandes valeurs du débit, l'écoulement est en fait entièrement turbulent.

L'accord apparent entre la théorie et l'expérience de la référence [17] provient de la compensation de deux erreurs. Dans le régime laminaire, le profil des vitesses est presque parabolique et, comme cela a été prouvé dans cette étude, la théorie prévoit des nombres de Nusselt plus petits pour un profil des vitesses parabolique que pour un profil uniforme. La Fig. 9 montre que la différence augmente lorsque le nombre de Péclet augmente. Pour des écoulements turbulents ou mixtes, le nombre de Nusselt réel est naturellement plus grand qu'en écoulement laminaire au même nombre de Péclet. Ainsi, en supposant que l'écoulement est laminaire, mais en utilisant dans la théorie un profil des vitesses erroné qui rend le nombre de Nusselt artificiellement grand, on arrive, dans la référence [17], à un accord relatif apparent entre des valeurs mesurées du nombre de Nusselt dans un écoulement de transition ou turbulent, et des valeurs calculées pour un écoulement laminaire.

On a converti les résultats de la référence [17] à l'aide des paramètres utilisés ici, et les points ainsi obtenus qui correspondent au régime laminaire ont été portés sur la Fig. 9. Ils sont en accord avec l'étude théorique faite ici. Malheureusement, les renseignements donnés dans la référence [17] ne permettent pas de calculer le nombre de Prandtl du fluide et de comparer les résultats avec ceux des équations (54) et (55) pour les régimes turbulents et mixtes.

Bien que les résultats théoriques n'aient été vérifiés par l'expérience que pour $\alpha^2 = 0$, la similitude de la méthode de calcul pour toutes les valeurs du nombre de Taylor, du moins jusqu'à $\alpha^2 = \pi^2$, suggère qu'un accord semblable

entre la théorie et l'expérience doit exister tant que l'écoulement reste laminaire. Malheureusement, il n'existe pas en ce moment de résultats expérimentaux indiquant les domaines de valeurs de Re et α^2 où l'écoulement entre deux disques tournant à la même vitesse reste laminaire. Il n'y a pas non plus de résultats théoriques ou expérimentaux permettant de calculer le nombre de Nusselt en écoulement turbulent entre deux disques tournant, avec source au centre. Un programme expérimental, préparé en vue d'obtenir l'information qui fait défaut, a cependant été à l'Université de Colorado et l'on espère obtenir bientôt des résultats permettant de répondre aux questions posées plus haut.

7. CONCLUSIONS

Un étude théorique et expérimentale du transfert de masse et de chaleur en écoulement laminaire entre deux disques parallèles avec source au centre a montré que les résultats expérimentaux, pour un nombre de Taylor nul, sont en accord avec une solution de l'équation de l'énergie trouvée en supposant que l'écoulement transversal est négligeable et que la forme du profil des vitesses radiales est indépendante de la distance radiale.

La similitude des solutions, sous forme de séries, des équations de Navier-Stokes pour des disques tournant à la même vitesse et pour des disques fixes, suggère que la solution analytique qui utilise le profil des vitesses radiales calculé pour le nombre de Taylor du système, devrait également prédire correctement le transfert de masse ou de chaleur dans le cas de deux disques tournant à la même vitesse, dans le régime laminaire.

Nous avons établi une relation empirique pour l'écoulement radial entre deux disques fixes dans le régime turbulent, ainsi qu'un critère de transition inverse dans le cas d'un écoulement turbulent à l'entrée. Des expériences supplémentaires sont nécessaires pour déterminer le transfert de masse ou de chaleur dans le cas de disques tournant et d'un régime d'écoulement turbulent, et pour étudier l'influence du nombre de Taylor sur la transition.

REMERCIEMENTS

L'auteur tient à exprimer sa reconnaissance à Monsieur le Professeur Edmond A. Brun pour avoir dirigé cette recherche et pour avoir mis à sa disposition les installations de son laboratoire.

L'auteur remercie également le Dr. H. Viviani pour une étude critique du manuscrit, le Dr. G. C. Culler et Madame Mock pour avoir effectué une partie des calculs numériques, et le Dr. J. L. Peube pour de nombreuses et fructueuses discussions.

Ce travail a été accompli au Laboratoire d'Aérodynamique du Centre National de la Recherche Scientifique, alors que l'auteur était en congé de l'Université de Colorado, Boulder, Colorado, grâce à une bourse de Professorat accordée par le "Council on Research and Creative Activities". Une aide financière a été également fournie par le "United States Educational Commission for France" sous la forme d'une bourse Fulbright.

BIBLIOGRAPHIE

1. J. L. PEUBE, Sur l'écoulement radial permanent d'un fluide visqueux, incompressible entre deux plans parallèles fixes, *J. Mécanique* **2**, 377 (1963).
2. P. S. MOLLER, Radial flow without swirl between parallel discs, *Aeronaut. Q.* **14**, 163, 186 (1963).
3. P. SOURIEAU, Ecoulement laminaire stationnaire de révolution d'un fluide incompressible entre deux plans parallèles indéfinis, Inst. du Pétrole, Proj. No. P-34/82000 (juillet 1964).
4. S. B. SAVAGE, Laminar flow between parallel plates, *J. Appl. Mech.* **31**, 594 (1964).
5. J. H. LIVESEY, Inertia effects in viscous flow, *Int. J. Mech. Sci.* **1**, 84 (1960).
6. T. HAGIWARA, Studies on the characteristics of radial flow nozzles, *Bull. J.S.M.E.* **5**, 656 (1962).
7. R. COMOLET, Ecoulement d'un fluide entre deux plans parallèles, *Publ. Scient. Tech. Minist. Air*, No. 334 (1957).
8. C. P. CHEN et J. L. PEUBE, Sur l'écoulement radial divergent d'un fluide visqueux incompressible entre deux plans parallèles, *C.R. Hebd. Séanc. Acad. Sci., Paris* **258**, 5353 (1964).
9. W. RICE, An analytical and experimental investigation of multiple disk pumps and compressors, *J. Engng Pwr* **85**, 191 (1963).
10. S. H. HASINGER et L. G. KEHRT, Investigation of a shear force pump, *J. Engng Pwr* **85**, 201 (1963).
11. M. C. BREITER et K. POHLHAUSEN, Laminar flow between two parallel rotating disks, Rept. No. ARL 62-318, Aero. Res. Lab., Wright-Patterson AFB, Ohio (1962).
12. F. KREITH et J. L. PEUBE, Ecoulement entre deux disques parallèles en rotation, *C.R. Hebd. Séanc. Acad. Sci., Paris* **260**, 5184 (1965).
13. F. KREITH, E. DOUGHMAN et H. KOZLOWSKI, Mass and heat transfer from an enclosed rotating disk with and without source flow, *J. Heat Transfer* **85**, 153 (1963).

14. F. KREITH, Reverse transition in radial source flow between two parallel planes, *Physics Fluids* 8, No. 7 (1965).
15. N. TESLA, Turbine, U.S. Patent No. 1-061-206 (1913).
16. R. L. CLARKE et L. A. BROMLEY: Saline water conversion by multiple effect rotating evaporator, *Chem. Engng. Prog.* 57, 64 (1961).
17. R. A. THOMAS et M. M. COBBLE, Radial flow heat transfer, *J. Heat Transfer* 85, 189 (1963).
18. F. KREITH, Transfert de chaleur dans un écoulement radial divergent d'un fluide visqueux incompressible entre deux plans parallèles, *C.R. Hebd. Séanc. Acad. Sci., Paris* 260, 62 (1965).
19. B. E. LAUNDER, Laminarization of the turbulent boundary layer by acceleration, M.I.T. Gas Turbine Laboratory Rept. No. 77 (1964).
20. M. SIBULKIN, Transition from turbulent to laminar pipe flow, *Physics Fluids* 5, 282 (1962).
21. J. G. KNUDSEN et D. L. KATZ, *Fluid Dynamics and Heat Transfer*, p. 227. McGraw-Hill, New York (1958).
22. F. KREITH, J. H. TAYLOR et J. P. CHANG, Heat and mass transfer from a rotating disk, *J. Heat Transfer* 81, 95 (1959).
23. T. K. SHERWOOD, Heat transfer, mass transfer and fluid friction—Relationships in turbulent flow, *Ind. Engng Chem.* 42, 2077 (1950).
24. S. N. SINGH, Heat transfer by laminar flow in a cylindrical tube, *Appl. Scient. Res.* A7, 325 (1958).
25. G. M. BROWN, Heat or mass transfer in a fluid in laminar flow in a circular or flat duct, *A.I.Ch. E. JI* 6, 179 (1960).
26. A. P. HATTON et J. S. TURTON, Heat transfer in the thermal entrance length with laminar flow between parallel walls at unequal temperatures, *Int. J. Heat Mass Transfer* 5, 673 (1962).
27. J. R. SELLARS, M. TRIBUS et J. S. KLEIN, Heat transfer to laminar flow in a round tube or a flat conduit—The Graetz problem extended, *Trans. Am. Soc. Mech. Engrs* 78, 441 (1956).
28. M. TRIBUS et J. KLEIN, Forced convection from non-isothermal surfaces, in *Heat Transfer: A Symposium*, p. 211. University of Michigan Press (1953).
29. S. J. KLINE et F. A. MCCLINTOCK, Describing uncertainties in single sample experiments, *Mech. Engng* 75, 3 (1953).
30. F. KREITH, Transfert de chaleur dans le cas d'un écoulement radial entre deux disques parallèles, Thèse de Docteur de l'Université de Paris (1965).
31. E. L. DOUGHMAN, An experimental investigation of mass transfer from an enclosed rotating disk with forced source flow, Thesis, University of Colorado, Boulder, Colorado, U.S.A. (1959).

Abstract—The Navier-Stokes equations for laminar source flow between two co-rotating parallel disks were solved by series expansion. The dominant term for the radial velocity profile was then used to solve the energy equation and average Nusselt Numbers were evaluated numerically for several boundary conditions as a function of Reynolds, Prandtl, and Taylor Numbers. For zero rotational speeds the analytical solutions were found to be in excellent agreement with the results of experiments in the laminar flow regime, but an inverse transition phenomenon was observed to limit the laminar regime under certain conditions. In the turbulent flow region an empirical equation for the Nusselt Number at zero rotation was obtained from experimental data and a method for evaluating the average Nusselt Number in the mixed flow regime was developed.

Zusammenfassung—Die Navier-Stokes Gleichungen für laminare Quellströmung zwischen zwei gleichsinnig rotierenden parallelen Scheiben wurden durch Reihenentwicklung gelöst. Der bestimmende Ausdruck für das radiale Geschwindigkeitsprofil wurde zur Lösung der Energiegleichung verwendet und mittlere Nusselt-Zahlen wurden numerisch für verschiedene Grenzbedingungen als Funktion der Reynolds-, Prandtl- und Taylorzahl bestimmt. Für Rotationsgeschwindigkeit Null zeigten die analytischen Lösungen ausgezeichnete Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Versuche im laminaren Strömungsbereich, doch wurde ein inverses Umschlagphänomen beobachtet das unter bestimmten Bedingungen die Laminarform begrenzt. Im turbulenten Strömungsbereich wurde aus Versuchswerten eine empirische Gleichung für die Nusselt-Zahl bei der Rotation Null erhalten und eine Methode zur Bestimmung der mittleren Nusselt-Zahl im Bereich der Mischströmung entwickelt.

Аннотация—С помощью разложения в ряд решены уравнения Навье Стокса для ламинарного течения между двумя вращающимися параллельными дисками при осевом подводе жидкости. Для решения уравнения энергии использовался доминирующий член радиального профиля скорости. Для нескольких граничных условий проведен численный расчет зависимости средних значений критерия Нуссельта от чисел Рейнольдса, Прандтля и Тейлора. Найдено, что для случая нулевых угловых скоростей аналитические решения прекрасно согласуются с результатами экспериментов по ламинарному режиму течения, но наблюдалось, что при определенных условиях явление перехода ограничивает ламинарный режим. В турбулентной области течения по экспериментальным данным получено эмпирическое уравнение для критерия Нуссельта при нулевом вращении, и разработан метод расчета среднего значения критерия Нуссельта для режима смешанного течения.